

**Reversibilitäts - Begriffe
für Automorphismen - Gruppen
auf von Neumann - Algebren**

von

Hartmut Scheller

aus

Surminnen Krs. Angerburg/Ostprien

Reversibilitäts-Begriffe für Automorphismen-Gruppen auf von Neumann-Algebren

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Hartmut Scheller

aus

Surminnen Krs. Angerburg/Ostpreußen

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 26. 11. 1969

Dekan: Universitätsprofessor Dr. F. Tichy
Erstberichterstatter: Universitätsprofessor Dr. K. Jacobs
Zweitberichterstatter: Universitätsprofessor Dr. H. Bauer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

1. Der Ergodensatz und der Aufspaltungssatz für Kontraktions-Halbgruppen auf Hilberträumen
2. Automorphismengruppen in von Neumann-Algebren und ihre kovarianten Darstellungen
3. Endliche von Neumann-Algebren und der Ergodensatz von Kovacs und Szücs
4. Diskussion einiger Reversibilitäts-Begriffe
5. Eine Charakterisierung G-endlicher von Neumann-Algebren
6. Anhang: Normale Abbildungen auf von Neumann-Algebren

Literaturverzeichnis

Einleitung

Viele der stärksten und interessantesten Sätze über von Neumann-Algebren gelten nur für endliche oder allenfalls noch für halbbendliche v.N.-Algebren, d.h. solche ohne rein unendlichen Anteil (halbbendlich sind z.B. die vollen Operator-Algebren $L(H)$). Unglücklicherweise werden jedoch für wichtige physikalische Anwendungen - z.B. die Beschreibung thermodynamischer Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden - gerade die rein unendlichen v.N.-Algebren benötigt.

Der Begriff der endlichen von Neumann-Algebren findet ebenfalls eine wichtige Anwendung in der von Segal und anderen Anfang der fünfziger Jahre ausgearbeiteten 'nichtkommutativen Maß- und Integrationstheorie'. Ein wesentlicher Bestandteil dieser Theorie ist die Hinzunahme auch unbeschränkter Operatoren, nämlich der bezüglich einer von Neumann-Algebra 'meßbaren' Operatoren, sowie die Einführung eines Begriffes der Fast-Konvergenz. In beide Definitionen geht wesentlich der Begriff endlicher Projektionen ein; für rein unendliche von Neumann-Algebren, d.h. solche ohne endliche Projektionen, ist dieses Anwendungsgebiet leer. Für eine auch die recht unzugänglichen rein unendlichen von Neumann-Algebren einschließende Behandlung der von Neumann-Algebren erscheint es daher sinnvoll, aus dem bekannten Bündel von Eigenschaften, die jede für sich die endlichen v.N.-Algebren charakterisieren, einzelne herauszugreifen und geeignet zu verallgemeinern.

Im Rahmen solcher Verallgemeinerungsversuche bewegt sich diese Arbeit; sie ist dementsprechend von sehr technischer Natur. Das behandelte Problem kann wie folgt skizziert werden:

Mit jeder von Neumann-Algebra A ist die Gruppe $G_u(A) \subseteq \text{Aut}(A)$ aller durch die unitären Elemente $u \in A$ definierten inneren Automorphismen $a \mapsto u a u^* : A \rightarrow A$ gegeben. Endlich ist eine v.N.-Algebra genau dann, wenn es eine G_u -invariante bedingte Erwartung (vgl. 6.7) von A auf die Algebra der $G_u(A)$ -invarianten Elemente, d.h. das Zentrum von A , gibt.

Indem man $G_u(A)$ durch andere Automorphismen-Gruppen G ersetzt, gelangt man zu dem von Kovacs und Szűcs untersuchten Begriff der G -endlichen von Neumann-Algebren. Diese sind genau durch die Gültigkeit eines Ergodensatzes ausgezeichnet, und zwar eines Ergodensatzes, der in recht natürlicher Weise aus dem Ergodensatz von Alaoglu-Birkhoff über Halbgruppen von Kontraktionen in Hilberträumen gewonnen werden kann.

Nun hat man auf Hilberträumen auch noch die weiter ausgearbeitete Theorie der Aufspaltung in reversible Vektoren und Flucht-Vektoren zur Verfügung. In der vorliegenden Arbeit wird die Anwendung dieser Theorie auf von Neumann-Algebren untersucht. Dabei wird zum einen die Äquivalenz der G -Endlichkeit mit einer zunächst allgemeiner scheinenden Eigenschaft nachgewiesen, zum anderen werden drei weitere Reversibilitäts-Eigenschaften hierarchisch geordnet, aber nicht durch Beispiele voneinander getrennt.

Die Terminologie ist dem Standardwerk von Dixmier [1] über von Neumann-Algebren entnommen, eine Auswahl der wichtigsten Begriffe und Sätze ist in Abschnitt 6 zusammengestellt.

1. Der Ergodensatz und der Aufspaltungssatz für
Kontraktionshalbgruppen auf Hilberträumen

Es sei H ein Hilbertraum und $S \subseteq L(H)$ eine Halbgruppe von Kontraktionen. $\bar{S}$ sei der Abschluß von S in der mit der schwachen Operator-Topologie versehenen Menge $L(H)$ (vgl. 6.1), und $\overline{\text{conv}}(S)$ sei der schwache Abschluß der konvexen Hülle von S . Wir unterscheiden die vier folgenden Typen des Transformationsverhaltens unter S .

Definition 1:

- a) Ein Vektor $h \in H$ heißt unter S
- invariant , falls $sh = h$ für alle $s \in S$,
 - streuend , falls $0 \in \overline{\text{conv}}(S)h$
 - reversibel, falls zu jedem $\bar{s} \in \bar{S}$ ein $\bar{t} \in \bar{S}$
 existiert mit $\bar{t}\bar{s}h = h$,
 - Fluchtvektor, falls $0 \in \bar{S}h$.
- b) Die Menge dieser Vektoren werde resp. mit H_I, H_S, H_R
 und H_F bezeichnet.

Es gelten dann die beiden folgenden Sätze, die wir kurz mit Ergodensatz und Aufspaltungssatz bezeichnen wollen.

Satz 1.1 (Ergodensatz)

Es ist $H = H_I \oplus H_S$ eine orthogonale Zerlegung in abgeschlossene Unterräume; die Projektion $p_I: H \rightarrow H_I$ ist invariant unter $\overline{\text{conv}}(S)$, d.h. $\bar{s} p_I = p_I = p_I \bar{s}$ für alle $\bar{s} \in \overline{\text{conv}}(S)$; schließlich gilt $p_I \in \overline{\text{conv}}(S)$.

Satz 1.2 (Aufspaltungssatz)

- a) Es ist $H = H_R \oplus H_F$ eine orthogonale Zerlegung in abgeschlossene Unterräume; die Projektion $p_R: H \rightarrow H_R$ ist vertauschbar mit allen $\bar{s} \in \bar{S}$, d.h. $\bar{s} p_R = p_R \bar{s}$ für alle $\bar{s} \in \bar{S}$; schließlich gilt $p_R \in \bar{S}$.
- b) $\bar{S}$ wirkt nach Einschränkung auf H_R als Gruppe; auf $\bar{S} \upharpoonright H_R$ stimmen schwache und starke Operatortopologie überein und $S \upharpoonright H_R$ liegt stark dicht in $\bar{S} \upharpoonright H_R$; schließlich haben sämtliche $h \in H_R$ bedingt normkompakte Bahnen unter S
- c) $p_R \bar{S} \subseteq \bar{S}$ ist ein minimales zweiseitiges Ideal in $\bar{S}$.

(Siehe etwa Berglund-Hofman: Compact Semitopological Semigroups and Weakly Almost Periodic Functions, Springer Lecture Notes in Mathematics, Vol.42, 1967)

Anmerkung: Man kann relativ leicht beweisen, daß für konvexe Halbgruppen invariante und reversible Vektoren zusammenfallen, daß man also Satz 1.1 als Spezialfall von Satz 1.2 erhalten kann. In der Situation von Satz 1.1 werden Teil b) und c) von Satz 2 trivial, da dann $\bar{S} \upharpoonright H_R$ nur die identische Abbildung von H_R enthält.

2. Automorphismengruppen in von Neumann-Algebren und ihre kovarianten Darstellungen

Es sei A eine von Neumann - Algebra auf dem Hilbertraum H . Unter einem Automorphismus $g : A \longrightarrow A$ verstehen wir eine lineare Bijektion, die $g(a \cdot b) = g(a) \cdot g(b)$ und $g(a^*) = g(a)^*$ für alle $a, b \in A$ erfüllt. Automorphismen erhalten stets die Operator - Norm von A und sind Homeomorphismen bezüglich der σ -schwachen Operator topologie (vgl. 6.1).

$g : A \longrightarrow A$ heißt räumlicher Automorphismus, wenn es einen unitären Operator $U(g) \in L(H)$ gibt mit $g(a) = U(g) a U(g)^*$ für alle $a \in A$.

Definition 2.1

Es sei A eine von Neumann - Algebra auf dem Hilbertraum H und $G \subseteq \text{Aut } A$ eine Automorphismengruppe von A .

G heißt räumliche Automorphismengruppe, wenn es eine unitäre Darstellung $U : G \longrightarrow L(H)$ gibt mit $g(a) = U(g) a U(g)^*$ für alle $a \in A$ und $g \in G$.

Anmerkung: Oft geht man auch von einer Gruppe G unitärer Operatoren auf H aus und definiert $g : A \longrightarrow L(H)$ durch $g(a) = g a g^{-1}$. Die Menge der g liefert dann (und genau dann) eine Automorphismengruppe von A , wenn G im Normalisator von A bezüglich $L(H)$ liegt, d.h. wenn $gAg^{-1} \subseteq A$ ($g \in G$).

Es sei nun etwas allgemeiner eine normale Darstellung (vgl. 6.5.c) $\pi : A \longrightarrow L(H^\pi)$ mit $\pi(\text{Id}) = \text{Id}$ von A auf einem Hilbertraum H^π gegeben sowie eine unitäre Darstellung $U : G \longrightarrow L(H^\pi)$ von G .

Definition 2.2.

- a) Das Paar (π, U) heißt kovariante Darstellung von (A, G) , falls für jedes $a \in A$, $g \in G$ gilt $\pi(ga) = U(g)\pi(a)U(g)^{-1}$.
- b) (π, U) heißt treu, falls π treu ist.

Lemma 2.1:

Ist (π, U) eine treue kovariante Darstellung von (A, G) , so ist U treu.

Beweis: Ist nämlich $g_1 \neq g_2$, etwa $g_1 a \neq g_2 a$, so ist

$$U(g_1)\pi(a)U(g_1)^{-1} = \pi(g_1 a)$$

$$\neq \pi(g_2 a) = U(g_2)\pi(a)U(g_2)^{-1}$$

und damit $U(g_1) \neq U(g_2)$.

Anmerkung: In 6.4.e wird eine Abbildung treu genannt, wenn sie echt positive Elemente in echt positive überführt. Für Darstellungen ist treu schon dasselbe wie injektiv, denn ist π treu und $a \neq 0$, so ist $a \cdot a^*$ echt

positiv und damit

$$0 < \pi(a \cdot a^*) = \pi(a) \cdot \pi(a)^*,$$

also $\pi(a) \neq 0$.

Eine Standard-Konstruktion (Dixmier [1], Lemma 4 und Proposition 1) liefert zu jeder normalen Linearform f auf A

- a) einen Hilbertraum H_f mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_f$,
- b) eine lineare Abbildung $q_f : A \longrightarrow H_f$ mit
 $f(y^* x) = \langle q_f(x), q_f(y) \rangle_f$ für alle $x, y \in A$ und derart,
 daß $q_f(A) \subseteq H_f$ dicht liegt,
- c) einen Vektor $h_f = q_f(\text{Id}) \in H_f$,
- d) eine Darstellung $\pi_f : A \longrightarrow L(H_f)$

$$- \text{definiert durch } \pi_f(a) q_f(x) = q_f(ax) -$$

derart, daß h_f unter $\pi_f(A)$ ein zyklischer Vektor ist und
 daß $f(x) = \langle \pi_f(x) h_f, h_f \rangle$ gilt; π_f ist normal und es
 gilt $\pi_f(\text{Id}) = \text{Id}$.

Ist nun außerdem f G -invariant, d.h. gilt

$f(ga) = f(a)$ für alle $g \in G$ und $a \in A$, so definiere man

$$U_f(g) : H_f \longrightarrow H_f$$

durch

$$U_f(g) q_f(a) = q_f(ga).$$

Das Paar (π_f, U_f) ist dann eine kovariante Darstellung
 von (A, G) .

Definition 2.3:

Die oben konstruierte kovariante Darstellung (π_f, U_f) heißt Gelfand - Segal - Darstellung von (A, G) bezüglich der invarianten normalen Linearform f .

3. Endliche von Neumann-Algebren und der Ergodensatz von Kovacs und Szücs

Es sei A eine von Neumann-Algebra A auf dem Hilbert-
raum H und $G \subseteq \text{Aut}(A)$ sei eine Gruppe von Automorphismen.

Definition 3.1:

A heißt G-endlich, falls es zu jedem $0 \neq a \in A^+$ eine
normale G -invariante Linearform gibt mit $f(a) > 0$.

Beispiele für G -endliche v.N.-Algebren sind die endlichen
v.N.-Algebren, wenn man für G die Gruppe der durch ihre
unitären Elemente induzierten inneren Automorphismen wählt.
(vgl. 6.6.b)

Eine Klasse von G -endlichen v.N.-Algebren, die nicht
endlich sind, geben Kovacz und Szücs [7] an.

Definition 3.2:

Es sei $P_0 = P_0(A, G)$ die Menge der G -invarianten normalen
Zustände auf A ,

$E_0 = E_0(G)$ die Menge ihrer Träger,

$A_0 = A_0(G) = \{a \in A \mid ga = a \text{ für alle } g \in G\}$

(vgl. dazu 6.8.a und d)

Da Automorphismen von A stetig bezüglich der σ -schwachen
Operatorortopologie sind, ist A_0 σ -schwach abgeschlossen,
also eine von Neumann-Algebra.

Offensichtlich gilt $E_0 \subseteq A_0$:

Ist nämlich e_0 Träger des invarianten normalen Zustandes f , d.h. ist e_0 eine Projektion aus A mit den Eigenschaften

$$(T1) \quad f(e_0 a e_0) = f(a) \text{ für alle } a \in A$$

(T2) 'Ist $e \in A$ eine Projektion mit (T1), so ist $e \geq e_0$ '
und ist $g \in G$ beliebig, so hat wegen

$$\begin{aligned} f(g(e_0) a g(e_0)) &= f(g(e_0 g^{-1}(a) e_0)) \\ &= f(e_0 g^{-1}(a) e_0) \\ &= f(g^{-1}(a)) \\ &= f(a) \end{aligned}$$

$g(e_0)$ die Eigenschaft (T1), erfüllt also $g(e_0) \geq e_0$.

Genauso gilt $g^{-1}(e_0) \geq e_0$; da Automorphismen die Anordnung erhalten, gilt also $g(g^{-1}(e_0)) = e_0 \geq g(e_0)$ und damit $g(e_0) = e_0$.

Als nächstes führen wir einige Charakterisierungen G -endlicher von Neumann - Algebren an, die Kovacs und Szücs [7] gegeben haben.

Satz 3.1

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- a) A ist G -endlich
- b) Die Identität von A ist orthogonale Summe von Elementen aus E_0
- c) Die Identität von A ist Supremum von Elementen aus E_0
- d) Es gibt eine σ -schwach - stetige idempotente G -invariante positive treue lineare Abbildung $p : A \longrightarrow A_0$
- e) Die Menge $A_0 \cap \overline{\text{conv}}(Ga)$ ist für jedes $a \in A$ einpunktig.

Der Abschluß $\overline{\text{conv}}(Ga)$ ist dabei in der σ -schwachen Operator-Topologie zu bilden.

Das Hauptergebnis der Arbeit von Kovacs und Szücs ist der folgende Ergodensatz.

Satz 3.2

Ist A G -endlich, so existiert genau eine Abbildung $p : A \longrightarrow A_0$ mit den Eigenschaften aus Satz 3.1.d. Sie kann definiert werden durch $\{p(a)\} = A_0 \cap \overline{\text{conv}}(Ga)$. $p : A \longrightarrow A_0$ ist außerdem eine bedingte Erwartung und für jedes $f \in P_0$ und $a \in A$ ist $f(p(a)) = f(a)$.

Für endliche von Neumann - Algebren ist p gerade die sogenannte 'Abbildung h ' oder auch 'centre valued trace' von A auf sein Zentrum.

Unser Ziel ist es, die Sätze 1.1 und 1.2 aus dem ersten Abschnitt anzuwenden. Wir versuchen daher, die Automorphismen-Gruppe G durch eine Gruppe unitärer Operatoren auf einem Hilbertraum zu beschreiben.

Definition 3.3:

Es sei A eine von Neumann-Algebra auf dem Hilbertraum H . Ein Unterraum $H_0 \subseteq H$ heißt Separator für A , wenn aus $a, b \in A$ und $a|_{H_0} = b|_{H_0}$ stets $a = b$ folgt.

Definition 3.4:

Eine von Neumann-Algebra A heißt räumlich fast-invariant unter der Automorphismengruppe G genau dann, wenn es eine treue kovariante Darstellung (π, U) gibt, bei der der bezüglich $U(G)$ invariante Unterraum $H_I^\pi \subseteq H^\pi$ ein Separator für $\pi(A)$ ist.

Satz 3.3:

A ist G -endlich genau dann, wenn A unter G räumlich fast-invariant ist.

Diese Charakterisierung stammt von Doplicher-Kastler-Störmer [4], die daraus einen vereinfachten Beweis des Ergodensatzes von Kovacs und Szücs gewinnen. Die Beweis-Idee ist etwa wie folgt:

Ist A G -endlich, so ist die direkte Summe aller durch die invarianten normalen Zustände definierten Gelfand - Segal - Darstellungen eine geeignete treue kovariante Darstellung, mit der die Definition 3.4 erfüllt wird.

Ist umgekehrt A räumlich fastinvariant unter G , so bilden schon die von den invarianten Vektoren abgeleiteten Vektorzustände (vgl. 6.8.e) eine die G -Endlichkeit garantierende Teilmenge von P_0 .

4. Diskussion einiger Reversibilitäts-Begriffe

Die im vorigen Abschnitt behandelten G -endlichen von Neumann-Algebren (A, G) schränken die zugelassenen Automorphismengruppen dadurch ein, daß die Existenz genügend vieler invarianter normaler Zustände gefordert wird. Als Kandidaten kommen vor allem solche Automorphismengruppen in Frage, die selber schon reversibel in einem geeigneten Sinn sind. Die Reversibilität der Automorphismengruppe G kann sich dabei auf ihre Wirkung in einem passenden Hilbertraum beziehen oder auch auf ihre Wirkung in der von Neumann-Algebra A selbst; beide Möglichkeiten werden in der folgenden Definition präzisiert:

Definition 4.1:

Es sei A eine von Neumann-Algebra auf dem Hilbertraum H und G eine Automorphismengruppe auf A

a) A heißt räumlich reversibel bezüglich G ,

wenn es eine treue kovariante Darstellung (π, U) von (A, G) gibt, so daß der bezüglich $U(G)$ reversible Unterraum $H_R^\pi \subseteq H^\pi$ schon gleich dem vollen Darstellungsraum H^π ist.

b) A heißt w^* -reversibel bezüglich G , wenn der Abschluß $\bar{G}^{w^*}$ von G in $L(A)$, der Menge aller norm-stetigen linearen Transformationen von A , bezüglich der punkweisen σ -schwachen Operatortopologie auf A eine kompakte topologische Automorphismengruppe bezüglich dieser Topologie ist.

Anmerkung: Die Bezeichnung w^* -reversibel ist gewählt worden, weil die σ -schwache Operatortopologie von A mit der w^* -Topologie von A bezüglich des Präduals A_* übereinstimmt (vgl. 6.3.b).

Reversibilität ist eng mit Fastperiodizität verbunden. Wir treffen die folgende Definition:

Definition 4.2:

- a) Eine positive Linearform f auf der von Neumann-Algebra A heiße fastperiodisch bezüglich der Automorphismengruppe G , wenn alle durch $F_{f,a}(g) = f(g(a))$ definierten Funktionen $F_{f,a}$ ($a \in A$) fastperiodisch auf G sind.
- b) Eine normale Linearform f auf A heiße normal-fastperiodisch, falls f fastperiodisch ist und falls die durch Bildung des fastperiodischen Mittelwerts $\overline{F}_{f,x} =: \bar{f}(x)$ definierte positive Linearform $\bar{f}$ normal ist.
- c) A heißt normal-fastperiodisch bezüglich G genau dann, wenn es zu jedem $0 \neq a \in A^+$ eine normal-fastperiodische Linearform f mit $f(a) > 0$ gibt.

Satz 4.1

Man betrachte die folgenden Aussagen:

- a) A ist räumlich reversibel bezüglich G
- b) A ist w^* -reversibel bezüglich G
- c) Jede normale Linearform auf A ist normal-fastperiodisch unter G

d) A ist normal-fastperiodisch unter G

e) A ist G -endlich

Dann gilt $a \approx b \approx c \approx d \approx e$.

Beweis:

$a \approx b$:

Es sei (π, U) eine treue kovariante Darstellung von (A, G) derart, daß ganz H^π bezüglich $U(G)$ reversibel ist. Dann ist die schwache Hülle $\overline{U(G)}$ von $U(G)$ eine Gruppe unitärer Operatoren, auf $\overline{U(G)}$ fallen starke und schwache Operator-Topologie zusammen und $\overline{U(G)}$ ist bezüglich dieser Topologie eine kompakte topologische Gruppe.

Die Elemente aus $\overline{U(G)}$ bezeichnen wir mit $U\bar{g}$, wobei der vorangestellte Index U nur die Bedeutung hat, an die Zugehörigkeit zur Gruppe $\overline{U(G)}$ zu erinnern. Dabei haben wir die Freiheit, die Elemente $U(g) \in U(G)$ mit Ug zu bezeichnen.

Daraus folgt nun, daß mit $U\bar{g} \in \overline{U(G)}$ und $a \in A$ stets $U\bar{g} \pi(a) U\bar{g}^{-1} \in (A)$ gilt. Denn zu jedem $U\bar{g} \in \overline{U(G)}$ existiert ein Netz $\{Ug_\lambda\} \subseteq U(G)$ mit $U\bar{g} = \lim Ug_\lambda$ (stark).

Für dieses Netz gilt

$$\begin{aligned} U\bar{g} \pi(a) U\bar{g}^{-1} &= \lim Ug_\lambda \pi(a) Ug_\lambda^{-1} \text{ (stark)} \\ &= \lim \pi(g_\lambda a), \text{ da } (\pi, U) \text{ kovariant} \end{aligned}$$

und damit $U\bar{g} \pi(a) U\bar{g}^{-1} \in \pi(A)$, da $\pi(A)$ als v.N.-Algebra gegen Konvergenz in der starken Operatortopologie abgeschlossen ist. (vgl. 6.5.b)

Durch

$$\bar{g}(a) = \pi^{-1} (U\bar{g} \pi(a) U\bar{g}^{-1})$$

wird also zu jedem $U\bar{g} \in \overline{U(G)}$ ein Automorphismus

$\bar{g} : A \rightarrow A$ definiert. Es sei

$$\bar{G} = \{\bar{g} : A \rightarrow A \mid U\bar{g} \in \overline{U(G)}\}$$

Dann ist durch

$$\bar{U}(\bar{g}) = U\bar{g}$$

eine Darstellung $\bar{U} : \bar{G} \rightarrow L(H^\pi)$ definiert, die U fortsetzt, und das Paar $(\pi, \bar{U})$ ist eine treue kovariante Darstellung von $(A, \bar{G})$.

Wir nennen die mittels $\bar{U}^{-1}$ von $\overline{U(G)}$ auf $\bar{G}$ übertragene Topologie $T_{\bar{U}}$. Sie ist offenbar definiert durch die Eigenschaft

$$\bar{g}_\alpha \xrightarrow{T_{\bar{U}}} \bar{g} \quad \text{iff} \quad U\bar{g}_\alpha \longrightarrow U\bar{g} \quad (\text{stark in } L(H^\pi))$$

und kompakt.

Wir betrachten ferner auf $L(A)$ die von den durch

$$\varphi_{a,h_1,h_2}(s) = \langle \pi(sa) h_1, h_2 \rangle \quad (a \in A, h_1 \in H^\pi)$$

definierten Funktionen erzeugte Topologie, die wir mit T_H bezeichnen. Da A eine Eins hat und die $\langle \pi(\cdot) h_1, h_2 \rangle$ Elemente des Präduals sind (vgl. 6.8.e), ist T_H größer als die Topologie der punktweisen w^* -Konvergenz.

T_H ist aber immer noch hausdorffsch, weil π als treu vorausgesetzt wurde.

Die Spurtopologie von T_H auf $\bar{G}$ wird gerade definiert durch

$$\bar{g}_i \xrightarrow{T_H} \bar{g} \times U_{\bar{g}_i} \pi(a) U_{\bar{g}_i}^{-1} \longrightarrow U_{\bar{g}} \pi(a) U_{\bar{g}}^{-1}$$

schwach in $L(H^\pi)$ für alle $a \in A$

(bei dieser Charakterisierung wurde bereits die Kovarianz der Darstellung $(\pi, \bar{U})$ von $(A, \bar{G})$ benutzt). Aus der

$T_{\bar{U}}$ -Konvergenz folgt also die T_H -Konvergenz, d.h. die Spurtopologie $T_H \upharpoonright \bar{G}$ ist größer als $T_{\bar{U}}$. Sie kann nicht echt größer sein, weil $T_{\bar{U}}$ kompakt und beide hausdorffsch sind. Mithin ist $\bar{G}$ kompakt in der Topologie T_H und auf $\bar{G}$ ist T_H identisch mit $T_{\bar{U}}$; insbesondere ist $\bar{G}$ der T_H -Abschluß von G in $L(A)$.

Nun betrachten wir den Abschluß $\bar{G}^{w^*}$ von $G \leq L(A)$ bezüglich der Topologie der punktweisen w^* -Konvergenz. Da diese Topologie feiner ist als T_H , gilt

$$\bar{G}^{w^*} \subseteq \bar{G}.$$

Andererseits ist wegen

$$G \subseteq \bigcap_{a \in A} \{ x \in A \mid \|x\| \leq \|a\| \}$$

der Abschluß $\bar{G}^{w^*}$ von G kompakt in der punktweisen w^* -Konvergenz, also erst recht kompakt und daher abgeschlossen in der Topologie T_H . Es gilt also $\bar{G}^{w^*} = \bar{G}$, und die beiden Topologien stimmen auf $\bar{G}$ überein.

Zusammenfassend haben wir also gezeigt, daß die Darstellung $\bar{U} : \bar{G} \longrightarrow \bar{U}(\bar{G})$ ein Homeomorphismus von $\bar{G}^{w^*}$ auf die topologische Gruppe $\bar{U}(\bar{G})$ ist.

$\bar{G}^{w^*}$ ist also mit der Topologie der punktweisen w^* -Konvergenz eine kompakte topologische Gruppe von Automorphismen, d.h. A ist bezüglich G^{w^*} -reversibel.

b $\sim$ c:

Es sei A eine von Neumann-Algebra, deren σ_w o p -Topologie (vgl. 6.1) wir mit T_{w*} bezeichnen (vgl. 6.3.c) und $G \subseteq \text{Aut } A \subseteq L(A)$ eine Automorphismengruppe von A , deren T_{w*} -Abschluß $\bar{G}^{w*}$ in $L(A)$ eine kompakte topologische Gruppe von Automorphismen von A ist.

Da die Topologie T_{w*} definiert ist durch

$$(x) \quad s \xrightarrow{T_{w*}} s \quad \& \quad f(s \cdot a) \longrightarrow f(s \cdot a) \quad \text{für alle } a \in A, f \in A_*$$

(vgl. 6.3.b und c) und da $\bar{G}^{w*}$ eine kompakte topologische Gruppe ist, sind für jedes $f \in A_*$ $x \in A$ die durch

$$(xx) \quad \bar{F}_{f \cdot x}(\bar{g}) = f(\bar{g} \cdot x)$$

definierten Funktionen auf $\bar{G}^{w*}$ stetig, also auf $\bar{G}^{w*}$ fastperiodisch; damit sind auch die $F_{f \cdot x} := \bar{F}_{f \cdot x} \mid G$ fastperiodisch auf G . Der fastperiodische Mittelwert von $F_{f \cdot x}$ werde mit $\bar{F}_{f \cdot x}$ bezeichnet.

Es sei nun f eine normale Linearform auf A . Nach der obigen Überlegung ist f fastperiodisch; es bleibt zu zeigen, daß f normal-fastperiodisch ist. Da die durch $\bar{f}(x) = \overline{F_{f \cdot x}}$ definierte invariante Linearform positiv ist, genügt dafür der Nachweis, daß für jede orthogonale Familie $\{e_\iota\} \subseteq A$ von Projektionen

$$\bar{f}(\sum e_\iota) = \sum \bar{f}(e_\iota) \quad \text{ist.} \quad (\text{vgl. 6.8.b})$$

Sei also $\{e_\alpha\} \subseteq A$ eine orthogonale Familie von Projektionen und μ das Haarsche Maß auf $\bar{G}^{w*}$.

Da durch Automorphismen Projektionen wieder in Projektionen übergeführt werden und hierbei die Orthogonalität erhalten bleibt, ist für jedes $\bar{g} \in \bar{G}^{w*}$ auch $\{\bar{g}(e_\alpha)\}$ wieder eine orthogonale Familie.

Da alle endlichen Partialsummen von $\sum e_\alpha$ durch die Identität beschränkt werden, existiert diese Summe als Supremum ihrer Partialsummen und es gilt wegen der Normalität von f bzw. $\bar{g}$ $f(\sum e_\alpha) = \sum f(e_\alpha)$ bzw. $\bar{g}(\sum e_\alpha) = \sum \bar{g}(e_\alpha)$.

Es gilt also

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{f, \sum e_\alpha}(\bar{g}) &= f(\bar{g}(\sum e_\alpha)) \quad (\text{nach (xx)}) \\ &= f(\sum \bar{g}(e_\alpha)) \\ &= \sum f(\bar{g}(e_\alpha)) \\ &= \sum \tilde{F}_{f, e_\alpha}(\bar{g}) \end{aligned}$$

Die endlichen Partialsummen der Familie $\{\tilde{F}_{f, e_\alpha}\}$ bilden also ein aufsteigend gefiltertes System stetiger Funktionen auf der kompakten Menge $\bar{G}^{w*}$, deren Supremum $\tilde{F}_{f, \sum e_\alpha}$ wegen (x) stetig ist. Nach dem Satz von Dini konvergieren die Partialsummen also gleichmäßig, und es gilt wegen $\mu(\bar{G}^{w*}) < \infty$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\sum e_\iota) &= \tilde{F}_{f, \sum e_\iota} \\
&= \int \tilde{F}_{f, \sum e_\iota}(\bar{g}) \, d\mu(\bar{g}) \\
&= \int \sum \tilde{F}_{f, e_\iota}(\bar{g}) \, d\mu(\bar{g}) \\
&= \sum \int \tilde{F}_{f, e_\iota}(\bar{g}) \, d\mu(\bar{g}) \\
&= \sum \tilde{F}_{f, e_\iota} \\
&= \sum \tilde{f}(e_\iota).
\end{aligned}$$

Jede normale Linearform auf A ist also normal-fastperiodisch bezüglich G.

c $\sim$ d:

Da die normalen Linearformen die Punkte von A trennen, ist A sicher normal-fastperiodisch bezüglich G, wenn jede normale Linearform von A fastperiodisch ist.

d $\sim$ e:

Zum Beweis greifen wir auf die Charakterisierung in Satz 3.1.c zurück: A ist G-endlich genau dann, wenn die Identität ein Supremum von Trägern invarianter normaler Linearformen auf A ist. Die Aussage 'd $\sim$ e' folgt dann direkt aus dem folgenden Lemma.

Lemma 4.2

Ist f eine normal-fastperiodische Linearform mit dem fastperiodischen Mittelwert $\bar{f}$, so gilt für die Träger e_f bzw. $e_{\bar{f}}$ von f bzw. $\bar{f}$ die Beziehung

$$e_{\bar{f}} = \sup_{g \in G} g e_f ,$$

wobei das Supremum in der Menge aller Projektionen von A zu nehmen ist.

Beweis:

Der Träger e_f einer normalen Linearform f ist definiert durch

$$(1) \quad f(1 - e_f) = 0$$

$$(2) \quad \text{Ist } p \in A \text{ eine Projektion mit } f(p) = 0, \\ \text{so ist } p \leq 1 - e_f$$

Wir zeigen zuerst

$$(\times) \quad e_{gf} = g^{-1} e_f .$$

Es gilt nämlich $g f(1 - g^{-1} e_f) = f(g1 - g g^{-1} e_f) = f(1 - e_f) = 0$; und ist $0 = gf(p) = f(gp)$ für eine

Projektion $p \in A$, so ist $g p \leq 1 - e_f$, also $p \leq 1 - g^{-1} e_f$.

Es sei nun f normal-fastperiodisch mit dem Mittelwert $\bar{f}$.
 Wegen der G -Invarianz von $\bar{f}$ ist auch der Träger $e_{\bar{f}}$
 invariant. Nun ist

$$F_{f, 1-e_{\bar{f}}}(g) = f(g(1-e_{\bar{f}})) = f(1 - e_{\bar{f}})$$

unabhängig von g , also

$$f(1-e_{\bar{f}}) = \bar{F}_{f, 1-e_{\bar{f}}} = \bar{f}(1 - e_{\bar{f}}) = 0$$

und damit $1 - e_{\bar{f}} \leq 1 - e_f$, d.h. $e_f \leq e_{\bar{f}}$.

Da sich der gleiche Schluß auch mit den Linearformen gf
 statt f durchführen läßt, die den Träger $g^{-1}e_f$ haben,
 ist

$$\sup_{g \in G} ge_f \leq e_{\bar{f}}$$

Ist nun p eine andere Projektion mit $\sup_{g \in G} ge_f \leq p$, so
 ist für beliebiges g wegen $g^{-1}e_f \leq p$

$$\begin{aligned} 0 \leq F_{f, 1-p}(g) &= f(g(1-p)) \\ &\leq f(g(1-g^{-1}e_f)) \\ &= f(1 - e_f) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{also } \bar{F}_{f, 1-p} = \bar{f}(1 - p) = 0$$

und somit $1 - p \leq 1 - e_{\bar{f}}$, d.h. $p \geq e_{\bar{f}}$.

Daher ist $\sup_{g \in G} ge_f = e_{\bar{f}}$.

5. Eine Charakterisierung G-endlicher von Neumann-Algebren

Es sei (A, G) eine von Neumann-Algebra A , versehen mit einer Automorphismengruppe G . Wir haben im Abschnitt 3 gesehen (Satz 3.3), daß man im Fall einer G -endlichen von Neumann-Algebra oBdA annehmen darf, daß G durch eine Gruppe unitärer Operatoren induziert wird, deren Fixpunktraum ein Separator für A ist. In diesem Abschnitt versuchen wir eine etwas allgemeinere Situation herzustellen.

Definition 5.1:

A heißt räumlich fast-reversibel bezüglich G genau dann, wenn es eine treue kovariante Darstellung (π, U) von (A, G) gibt, für die der bezüglich $U(G)$ reversible Unterraum $H_R^\pi \subseteq H^\pi$ ein Separator für $\pi(A)$ ist.

Da G -endliche v.N.Algebren räumlich fast-invariant sind (Definition 3.4, Satz 3.3), sind G -endliche v.N.-Algebren erst recht räumlich fast-reversibel. Unser Ziel in diesem Abschnitt ist die Umkehrung, daß nämlich räumlich fast-reversible v.N.Algebren G -endlich sind. Der wichtigste Schritt dabei ist der folgende Satz:

Satz 5.1:

Es sei A eine von Neumann-Algebra auf H und $G \subseteq \text{Aut}(A)$ sei eine räumliche Automorphismengruppe mit einer dazu gehörigen kovarianten Darstellung (Id, U) von (A, G) .
(vgl. Def. 2.1 und 2.2).

Der bezüglich $U(G)$ reversible Unterraum $H_R \subseteq H$ sei ein Separator für A und $p_R : H \longrightarrow H_R$ sei die orthogonale Projektion auf H_R .

Es sei $A_R = \{ a \in A \mid ap_R = p_R a p_R \}$. Dann ist A_R eine v.N.Algebra und durch

$$\psi(a)p_R = p_R a p_R$$

ist eine treue bedingte Erwartung $\psi : A \longrightarrow A_R$ definiert.

Den Beweis dieses Satzes lösen wir in einzelne Schritte auf.

Lemma 5.2

Durch $\psi(a)p_R = p_R a p_R$ wird eine Abbildung $\psi : A \longrightarrow A$ definiert.

Beweis:

Da H_R ein Separator für A ist, kann es höchstens ein Element $\psi(a) \in A$ mit $\psi(a)p_R = p_R a p_R$ geben.

Die Existenz eines solchen $\psi(a)$ liefert nun der Aufspaltungssatz (Satz 1.2).

Gemäß Satz 1.2.a wählen wir ein Netz $\{U(g_\lambda)\} \subseteq U(G)$ mit $\lim U(g_\lambda) = p_R$; der Limes ist dabei immer in der schwachen Operator (wop)-Topologie gemeint. In der v.N.Algebra A ist nun jede normbeschränkte Menge bedingt wop-kompakt, insbesondere die Menge $\{U(g_\lambda) a U(g_\lambda)^{-1}\}$. Es gibt also ein $y \in A$ und ein kofinales Teilnetz von $\{U(g_\lambda)\}$ - das oBdA gleich dem ursprünglich gegebenen ist - mit

$$p_R = \lim U(g_\lambda), y = \lim U(g_\lambda) a U(g_\lambda)^{-1}.$$

Dann ist für $h_1, h_2 \in H$

$$\begin{aligned} & \| \langle (yp_R - p_R a p_R)h_1, h_2 \rangle \| \\ &= \lim \| \langle (yp_R - U(g_\lambda) a p_R)h_1, h_2 \rangle \| \\ &= \lim \| \langle (yp_R - U(g_\lambda) a U(g_\lambda)^{-1} U(g_\lambda) p_R)h_1, h_2 \rangle \| \\ &\leq \lim \| \langle (y - U(g_\lambda) a U(g_\lambda)^{-1})p_R h_1, h_2 \rangle \| \\ &\quad + \lim \| \langle U(g_\lambda) a U(g_\lambda)^{-1} (p_R - U(g_\lambda) p_R)h_1, h_2 \rangle \| \\ &= 0 + \lim \| \langle U(g_\lambda) a U(g_\lambda)^{-1} (p_R - U(g_\lambda) p_R)h_1, h_2 \rangle \| \end{aligned}$$

(der erste Summand ist Null wegen $y = \text{wop-lim } U(g_\lambda) a U(g_\lambda)^{-1}$)

$$\begin{aligned} &\leq \lim \| U(g_\lambda) a U(g_\lambda)^{-1} \| \| (p_R - U(g_\lambda) p_R)h_1 \| \| h_2 \| \\ &= \| a \| \cdot \| h_2 \| \lim \| (p_R - U(g_\lambda) p_R)h_1 \| \\ &= 0, \text{ da auf } H_R \text{ die schwache und starke Operator-Topologie von } \bar{G} \text{ übereinstimmen.} \end{aligned}$$

Lemma 5.3

Ist $p_R = \lim U(g_\iota)$, so ist $\psi(a) = \lim U(g_\iota) a U(g_\iota)^{-1}$
(schwach) für alle $a \in A$.

Beweis:

Als Netz in dem kompakten Raum $\{x \in A \mid \|x\| \leq \|a\|\}$
ist $\{U(g_\iota) a U(g_\iota)^{-1}\}$ nämlich genau dann konvergent,
wenn es nur einen Häufungspunkt hat. Das ist aber der
Fall, denn wir haben gerade gesehen, daß für jeden
Häufungspunkt y die Beziehung $yp_R = p_R a p_R$ gilt und
daß es nur ein solches y geben kann.

Lemma 5.4

Die Abbildung $\psi: A \longrightarrow A$ ist positiv und treu.

Beweis:

a) Es sei $a \in A^+$ und $\psi(a) = \lim U(g_\iota) a U(g_\iota)^{-1}$
gemäß Lemma 5.3. Dann sind die $a_\iota = U(g_\iota) a U(g_\iota)^{-1}$
positiv und für $h \in H$ gilt
 $\langle \psi(a) h, h \rangle = \lim \langle a_\iota h, h \rangle \geq 0$,
d.h. $\psi(a) \in A^+$.

b) Es sei $a \geq 0$ und $\psi(a) = 0$.

Dann ist wegen $\psi(a) p_R = p_R a p_R$ für beliebige $h \in H_R$

$$\begin{aligned} \langle a h, h \rangle &= \langle a p_R h, p_R h \rangle \\ &= \langle p_R a p_R h, h \rangle \\ &= 0 \\ &= \langle a^{\frac{1}{2}} h, a^{\frac{1}{2}} h \rangle \\ &= \| a^{\frac{1}{2}} h \|^2, \end{aligned}$$

also ist für alle $h \in H_R$ $a^{\frac{1}{2}} h = 0$ und damit $a \cdot h = a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} h = 0$, d.h. $a p_R = 0$.

Da H_R nach Voraussetzung ein Separator für A ist, folgt daraus $a = 0$, d.h. ψ ist treu.

Lemma 5.5

a) $A_R = \{a \in A \mid \psi(a) = a\}$ ist eine von Neumann-Algebra

b1) ψ ist linear

b2) ψ ist idempotent

b3) $\psi(a^*) = \psi(a)^*$ für alle $a \in A$

b4) $\psi(a_0 \cdot a) = a_0 \psi(a)$

$\psi(a \cdot a_0) = \psi(a) \cdot a_0$ für alle $a \in A$, $a_0 \in A_R$

b5) ψ ist normkontrahierend

b6) $\psi(ga) = g \psi(a)$

Beweis:

Es sei für den Beweis dieses Lemmas ein Netz $U(g_\iota)$ mit $\lim U(g_\iota) = p_R$ fest gewählt, so daß wir nebeneinander die Definitionen

$$\psi(a) p_R = p_R a p_R$$

und $\psi(a) = \lim U(g_\iota) a U(g_\iota)^{-1}$ (schwach) benutzen können.

$$\begin{aligned} \text{b2) Es ist } \psi(\psi(a)) p_R &= p_R \psi(a) p_R \\ &= p_R (p_R a p_R) \\ &= p_R a p_R \\ &= \psi(a) p_R, \end{aligned}$$

$$\text{also } \psi(\psi(a)) = \psi(a).$$

$$\begin{aligned} \text{b3) Es ist } \psi(a)^* &= \lim U(g_\iota) a^* U(g_\iota)^{-1} \\ &= \lim (U(g_\iota) a U(g_\iota)^{-1})^* \\ &= (\lim U(g_\iota) a U(g_\iota)^{-1})^* \quad (\text{vgl. 6.2.b}) \\ &= \psi(a)^* \end{aligned}$$

b4) Für $a_o \in A_R$, $a \in A$ gilt

$$\begin{aligned} \psi(a a_o) p_R &= p_R a (a_o p_R) \\ &= p_R a (p_R a_o p_R) \\ &= (p_R a p_R) a_o p_R \\ &= \psi(a) (p_R a_o p_R) \\ &= \psi(a) a_o p_R, \end{aligned}$$

$$\text{also } \psi(a a_o) = \psi(a) \cdot a_o.$$

Wegen b3) gilt nun, da mit $\psi(a_0) = a_0$ auch $\psi(a_0^*) = a_0^*$ ist,

$$\begin{aligned}\psi(a_0 a) &= (\psi(a_0) a^*)^* \\ &= \psi(a^* a_0^*)^* \\ &= (\psi(a^*) a_0^*)^* \\ &= a_0 \psi(a).\end{aligned}$$

a) Da die durch $f_1(x) = x p_R$ und $f_2(x) = p_R x p_R$ auf $L(H)$ definierten Funktionen stetig bezüglich der σ -schwachen Operator-Topologie sind, ist

$$A_R = A \cap \{x \in L(H) \mid f_1(x) = f_2(x)\}$$

abgeschlossen. Wegen b1) ist A_R linear, wegen b3) selbstadjungiert, wegen b4) eine Algebra; also ist A_R eine von Neumann-Algebra. b5) folgt sofort aus Lemma 5.3, wenn man die Behauptung in Ausdrücken eines Dualraums formuliert (vgl. 6.3.b): Gilt $x_i \rightarrow x$ (w^*) und sind alle $\|x_i\| = 1$, so ist $\|x\| \leq 1$.

b6) Nach Satz 1.2.a ist $U(g)p_R = p_R U(g)$, wir haben also

$$\begin{aligned}\psi(ga)p_R &= p_R g a p_R \\ &= p_R U(g) a U(g^{-1})p_R \\ &= U(g) p_R a p_R U(g^{-1}) \\ &= U(g) \psi(a) p_R U(g^{-1}) \\ &= U(g) \psi(a) U(g^{-1}) p_R \\ &= g \psi(a) p_R\end{aligned}$$

Satz 5.6:

Jede bezüglich einer Automorphismengruppe G räumlich fast-reversible von Neumann-Algebra ist G -endlich.

Beweis:

Zunächst wird durch treue kovariante Darstellungen keine der beiden Eigenschaften des Satzes geändert. Man kann also oBdA die Situation aus Satz 5.1 voraussetzen und erhält eine Abbildung $\psi: A \longrightarrow A_R$ mit den in Lemma 5.2 bis 5.5 angegebenen Eigenschaften.

Nach Definition von A_R ist p_R mit allen Elementen von A_R vertauschbar, also $p_R \in A_R'$. Da p_R als Separator für A vorausgesetzt wurde, ist p_R erst recht ein Separator für $A_R \subseteq A$. Somit ist die Einschränkung der Operatoren von A_R auf H_R ein Isomorphismus i_R von A_R auf die 'induzierte' von Neumann-Algebra $A_R \upharpoonright H_R$. (Dixmier [1], Prop. 2, S. 18, Prop. 5, S. 6 und Korollar 1, S. 7).

Der Deutlichkeit halber bemerken wir, daß sich $i_R(a)$ von $p_R a p_R$ nur dadurch unterscheidet, daß $p_R a p_R \in L(H)$ ist, aber $i_R(a) \in L(H_R)$. Insbesondere ist $i_R(p_R a p_R) = i_R(a) = i_R(a p_R) = i_R(p_R a)$.

Bezeichnen wir noch die Einschränkung von $U(g)$ auf den G -invarianten Unterraum H_R mit $\mathcal{P}_R(g)$, so ist mit $(i_R, \mathcal{P}_R)$ eine treue kovariante Darstellung von (A_R, G) gegeben.

A_R ist also räumlich reversibel bezüglich G und daher G -endlich (Satz 4.1), es gibt also eine G -invariante treue bedingte Erwartung von A_R auf die Fixpunktalgebra von A_R . Die Fixpunktalgebra von A_R ist gleichzeitig die Fixpunktalgebra von A , denn ist $a \in A$ ein Fixpunkt, d.h. gilt

$U(g) a U(g)^{-1} = a$ für alle $g \in G$, so gilt nach Lemma 5.3

$$\psi(a) = \lim U(g_n) a U(g_n)^{-1} = a,$$

also $a \in A_R$.

Wir wollen nun A_R und $U(G)$ durch $i_R(A_R)$ und $\mathcal{P}_R(G)$ ersetzen und auf diese Situation den Ergodensatz von Kovacs und Szücs (Satz 3.2) anwenden. Der Grund für diesen Umweg ist der, daß wir Betrachtungen über die σ -wop-Stetigkeit von ψ vermeiden wollen. Wegen b6) aus Lemma 5.5 und Satz 1.2.a bildet i_R die Fixpunktalgebra von A_R auf die Fixpunktalgebra von $A_R \upharpoonright H_R$ ab; wir können also die Aussage von Satz 3.2 gleich rückübersetzen und erhalten

Lemma 5.7

- a) Es gibt eine invariante bedingte Erwartung (vgl. 6.7) $\bar{\varphi}$ von $i_R(A_R)$ auf die Fixpunktalgebra von $i_R(A)$
- b) Durch $\bar{\varphi}(a) = i_R^{-1} \bar{\varphi}(i_R a)$ wird eine G -invariante bedingte Erwartung $\bar{\varphi}$ von A_R auf die Fixpunktalgebra A_0 von A definiert. Es gilt $\bar{\varphi}(a) = \bar{\varphi}(p_R a) = \bar{\varphi}(a p_R) = \bar{\varphi}(p_R a p_R)$.

Wir definieren nun schließlich die Abbildung $\chi : A \longrightarrow A_0$ durch

$$\chi(a) = \bar{\varphi}(\psi(a))$$

Es gelte (jeweils in der σ -schwachen Operator-Topologie)

$$a_\lambda \longrightarrow a. \text{ Dann gilt } p_R a_\lambda p_R \longrightarrow p_R a p_R,$$

d.h. $\psi(a_\lambda) p_R \longrightarrow \psi(a) p_R$. Wegen der Stetigkeit von $\bar{\varphi}$ und Lemma 5.7.b gilt dann

$$\begin{aligned} \chi(a_\lambda) &= \bar{\varphi}(\psi(a_\lambda)) = \bar{\varphi}(\psi(a_\lambda) p_R) \\ &\longrightarrow \bar{\varphi}(\psi(a) p_R) = \bar{\varphi}(\psi(a)) \\ &= \chi(a). \end{aligned}$$

χ ist also stetig. Daß χ als zusammengesetzte Abbildung eine bedingte Erwartung auf A_0 ist, sichern die Eigenschaften von Lemma 5.5. Aus Lemma 5.4 folgt die Treue.

Schließlich ist χ G -invariant, denn

$$\begin{aligned} \chi(ga) &= \bar{\varphi}(\psi(ga)) \\ &= \bar{\varphi}(g \psi(a)) \quad (\text{Lemma 5.5}) \\ &= \bar{\varphi}(\psi(a)) \\ &= \chi(a), \end{aligned}$$

nach dem Kriterium von Satz 3.1.d ist A also G -endlich.

6. Normale Abbildungen auf von Neumann-Algebren

1. Topologien auf $L(H)$:

Es sei H ein Hilbertraum und $L(H)$ die Menge aller beschränkten Operatoren auf H . Mit F bzw. DF werde die Menge aller endlichen Teilmengen von H bzw. $H \times H$ und mit F_σ bzw. DF_σ die Menge aller abzählbaren Teilmengen von H bzw. $H \oplus H$ bezeichnet, die eine konvergente Normquadrat-Summe besitzen.

Zu $M \in F_\sigma$ definieren wir die Halbnorm $\|\cdot\|_M$ durch $\|x\|_M = \left(\sum_{h \in M} \|xh\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ($x \in L(H)$), und zu $M \in DF_\sigma$ definieren wir die Halbnorm $\|\cdot\|_M$ durch

$$\|x\|_M = \left| \sum_{(h,h') \in M} \langle xh, h' \rangle \right| \quad (x \in L(H)).$$

Die starke [schwache, σ -starke, σ -schwache] Topologie auf $L(H)$ ist dann definiert als die von den Halbnormen

$\|\cdot\|_M$ erzeugte, wobei M alle Mengen $M \in F$

$[M \in DF, M \in F_\sigma, M \in DF_\sigma]$ durchläuft.

Für die starke, schwache, σ -starke, σ -schwache

Operatortopologie benutzen wir die Bezeichnung sop ,

wop , σsop , σwop .

2. Eigenschaften dieser Topologien

- a) $L(H)$ wird mit jeder der Topologien sop , wop , $\sigma\text{-sop}$, σwop zu einem lokalkonvexen hausdorffschen topologischen Vektorraum.
- b) Die Abbildung $x \mapsto x^* : L(H) \longrightarrow L(H)$ ist wop -stetig; die Abbildung $(x,y) \mapsto x \cdot y : L(H)_1 \times L(H) \longrightarrow L(H)$ ist sop -stetig ($L(H)_1$ sei die Einheitskugel des Banachraumes $L(H)$).
- c) Auf der Menge $L_u(H)$ der unitären Operatoren von H stimmen alle diese Topologien überein. Wegen b) bildet $L_u(H)$, versehen mit einer dieser vier Topologien, eine topologische Gruppe.
- d) Auf normbeschränkten Mengen stimmen die σ -schwache und die schwache Operator-Topologie überein.

3. Topologische Eigenschaften der v.N.-Algebren

- a) Eine selbstadjungierte Unterlgebra $A \subseteq L(H)$ mit $\text{Id}_H \in A$ heißt von Neumann-Algebra, wenn sie in einer der Topologien sop , wop , $\sigma\text{-sop}$, $\sigma\text{-wop}$ abgeschlossen ist - sie ist dann in allen vier Topologien abgeschlossen.

Dies ist äquivalent damit, daß die Norm-Einheitskugel A_1 von A abgeschlossen in einer dieser vier Topologien ist. Als normierte Räume sind v.N.-Algebren stets Banachräume.

- b) Ist A eine v.N.-Algebra, so ist die Menge L der wop -stetigen Linearformen gleich der Menge der sop -stetigen Linearformen und die Menge L_σ der $\sigma\text{-wop}$ -stetigen Linearformen gleich der Menge der $\sigma\text{-sop}$ -stetigen. L_σ ist ein in der Dualnorm abgeschlossener Unterraum des dualen Banachraums von A und enthält L als norm-dichte lineare Teilmenge. Bezüglich der durch $\langle a, f \rangle = f(a)$ definierten kanonischen Bilinearform

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L_\sigma \times A \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist A seinerseits der duale Banachraum zu L_σ , und die w^* -Topologie $\sigma(A, L_\sigma)$ ist gleich der σ -schwachen Operatorortopologie $\sigma\text{-wop}$.

- c) Wegen dieses Sachverhalts wird L_σ im allgemeinen der Präduale von A genannt und mit A^* bezeichnet.

- d) Zu $M \subseteq L(H)$ sei die 'Kommutante' $M' = \{x \in L(H) \mid xm = mx \ \forall m \in M\}$ definiert. Ist M selbstadjungiert, so ist M' eine v.N.-Algebra. $M \subseteq L(H)$ ist genau dann eine v.N.-Algebra, wenn $(M')' = M$ gilt.

4. Ordnung in von Neumann-Algebren

- a) Es sei A eine von Neumann-Algebra auf dem Hilbertraum H . Dann ist jedem $a \in A$ durch $f_a(h) = \langle ah, h \rangle$ eine Funktion auf H zugeordnet. Durch $a \leq b \Leftrightarrow f_a \leq f_b$ wird auf A eine scharfe Halbordnung definiert.
- b) Es gilt $a \geq 0$ genau dann, wenn es ein $x \in A$ gibt mit $a = x^*x$. Die Menge $A^+ = \{a \in A \mid a \geq 0\}$ ist ein konvexer Kegel.
- c) Zu jedem hermiteschen Element $a \in A$ (d.h. mit $a^* = a$) existieren eindeutig zwei Elemente $a^+, a^- \in A^+$ mit $a = a^+ - a^-$, $a^+ \cdot a^- = 0$.
- d) Zu jeder aufsteigend gefilterten Familie $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq A^+$, die eine obere Schranke in A^+ besitzt, existiert ein Supremum in A^+ .
- A ist jedoch nur dann ein Verband, wenn A kommutativ ist.
- e) Eine Abbildung $f : A \longrightarrow M$ in einen halbgeordneten Vektorraum M heißt normal, falls die Gleichung
- $$(N) \quad f(\sup a_\lambda) = \sup f(a_\lambda)$$
- für jede Familie $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq A$ gilt, für die das Supremum existiert; die Existenz des Supremums auf der rechten Seite wird gefordert. Normale Abbildungen führen also stets positive Elemente in positive über.
- f heißt treu, wenn aus $a \in A^+$ und $f(a) = 0$ stets $a=0$ folgt.

5. Normale Homomorphismen

- a) Sind A und B v.N.Algebren und ist $f : A \longrightarrow B$ eine normale Abbildung, so ist f σ wop -stetig (Dixmier [1], I § 4 Theorem 2)
- b) Ist $f : A \longrightarrow B$ außerdem ein Homomorphismus, der die Eins von A in die Eins von B überführt, so ist $f(A) \subseteq B$ eine v.N.Algebra
- c) Ein normaler Homomorphismus $f : A \longrightarrow L(H)$ einer von Neumann-Algebra in die volle Operatoralgebra eines Hilbertraums H heißt Darstellung von A .
- d) Automorphismen in v.N.-Algebren sind stets normal.

6. Normale Spuren

- a) Eine normale Abbildung $f : A^+ \longrightarrow R^+ \cup \{\infty\}$
 (normal sei wieder durch die Gleichung (N) aus 6.4.e
 definiert) heißt Spur, falls gilt

$$S_0 : f(0) = 0$$

$$S_1 : f(a+b) = f(a) + f(b) \quad a, b \in A^+$$

$$S_2 : f(\lambda a) = \lambda f(a) \quad \text{für } 0 < \lambda < \infty \text{ und } a \in A^+$$

$$S_3 : f(ua u^*) = f(a) \quad \text{für alle unitären } u \in A \\ \text{und alle } a \in A^+$$

- b) Eine Spur f heißt endlich, falls $f(a) < \infty$ für alle
 $a \in A^+$ gilt. A heißt endliche von Neumann-Algebra,
 wenn es zu jedem $0 \neq a \in A^+$ eine normale endliche
 Spur mit $f(a) > 0$ gibt.

7. Bedingte Erwartungen

Es sei A eine v.N.-Algebra und $A_0 \subseteq A$ eine Unter-
von Neumann-Algebra. Eine σ -schwach-stetige positive
normkontrahierende Abbildung $p : A \longrightarrow A_0$ heißt
bedingte Erwartung von A auf A_0 , falls gilt

$$E 1 : p(a_0) = a_0 \quad \text{für alle } a_0 \in A_0$$

$$E 2 : \left. \begin{array}{l} p(a_0 \cdot a) = a_0 \cdot p(a) \\ p(a \cdot a_0) = p(a) \cdot a_0 \end{array} \right\} \text{ für alle } a_0 \in A_0, a \in A$$

Ist (Ω, B, m) ein Wahrscheinlichkeitsraum und ist $B_0 \subseteq B$
ein Unter- σ -Körper, so erfüllt die wahrscheinlichkeits-
theoretische bedingte Erwartung die Bedingungen E 1 und E 2,
wenn man $A = L^\infty(\Omega, B, m)$, $A_0 = L^\infty(\Omega, B_0, m)$ setzt.

8. Normale Zustände

- a) Eine positive Linearform f auf der von Neumann-Algebra A heißt Zustand, falls $f(\text{Id}) = 1$ gilt. f heißt normaler Zustand, wenn f normale Linearform mit $f(\text{Id}) = 1$ ist.
- b) Ein Zustand ist genau dann normal, wenn für jede orthogonale Familie $\{e_\iota\}$ von Projektionen aus A $f(\sum e_\iota) = \sum f(e_\iota)$ ist. Unter $\sum e_\iota$ ist dabei das Supremum aller endlichen Partialsummen zu verstehen, das mit dem σ wop-Limes des Netzes aller endlichen Partialsummen übereinstimmt.
- c) Ein Zustand ist ebenfalls genau dann normal, wenn er σ wop-stetig ist, d.h. wenn er im Prädual von A liegt.
- d) Zu jeder normalen Linearform f auf A existiert ein größter Projektor $e' \in A$ mit $f(e') = 0$. Der Projektor $e = \text{Id} - e'$ heißt Träger von f . Er ist charakterisiert als der kleinste Projektor $e \in A$, der

$$f(a) = f(ea) = f(ae) = f(eae)$$

für alle $a \in A$ erfüllt.

- e) Ist $\pi: A \longrightarrow L(H^\pi)$ eine Darstellung von A (vgl. 6.5.c) und ist $h \in H$, so wird durch

$$\omega_h(a) = \langle \pi(a)h, h \rangle$$

ein normaler Zustand von A definiert. Die ω_h heißen Vektor-Zustände von A bezüglich der Darstellung π .

Sind etwas allgemeiner h_1, h_2 zwei Vektoren aus H^π , so wird durch

$$\omega_{h_1, h_2}(a) = \langle \pi(a)h_1, h_2 \rangle$$

eine σ wop-stetige Linearform definiert; ω_{h_1, h_2} ist also ein Element des Präduals (vgl. 6.3.b).

L i t e r a t u r

1. J.Dixmier: Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien. (Paris:Gauthier-Villars 1957)
2. J. Dixmier: Les C^* -algèbres et leurs représentations. (Paris: Gauthier-Villars 1964)
3. S.Doplicher, D.Kastler: Ergodic States in a Non Commutative Ergodic Theory. (Commun.math.Phys.7, 1968, S.1-20)
4. S.Doplicher, D.Kastler, E.Størmer : Invariant States and Asymptotic Abeliannes (Preprint)
5. K.Jacobs: Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie (Ergebnisse der Mathematik, Heft 28, Berlin, Springer 1960)
6. K.Jacobs: Lecture notes on ergodic theory (Universitet Aarhus, Matematisk Institut, 1962/63)
7. I.Kovacz, J.Szücs: Ergodic type theorems in von Neumann Algebras. (Acta Scient.Math. 27, 1966, S.233-246)

L E B E N S L A U F

Am 4.8.1939 wurde ich, HARTMUT SCHELLER, als viertes von fünf Kindern des Zimmerers und Stellmachers Otto Scheller und seiner Ehefrau Marta, geb. Mikoleit, in Surminnen, Kreis Angerburg (Ostpreußen), geboren. Von Herbst 1945 bis Ostern 1949 besuchte ich die Volksschule in Westerende, Kreis Norden; von Ostern 1949 bis Ostern 1958 das Ulrichsgymnasium in Norden. Dort legte ich im Februar 1958 am mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig die Reifeprüfung ab.

Im Sommersemester 1958 begann ich in Göttingen mit dem Studium der Mathematik, Physik und Chemie und legte im Mai 1961 als Zwischenprüfung das Vordiplom in Mathematik ab. Im SS 1963 wurde ich Schüler von Professor Jacobs, dem ich in der Folgezeit viel an Anregungen und Förderung zu danken habe. Im November 1965 bestand ich in Göttingen die Diplom-Prüfung.

Vom 1.1. bis 31.12.1966 und wieder seit dem 1.2.1969 war ich beim mathematischen Institut der Universität Erlangen-Nürnberg als wissenschaftlicher Angestellter mit der Hauptaufgabe der statistischen Beratung anderer Institute beschäftigt. Vom 1. Jan. 1967 bis 31.1.1969 war ich mit der Verwaltung einer Assistentenstelle beauftragt.

Im Oktober 1965 heiratete ich Dr.phil. Rita Podoll, damals Studienreferendarin. Im Januar 1968 wurde unsere Tochter Mechthild geboren.

Seit dem Sommer 1967 beschäftige ich mich auf Anregung von Professor Jacobs mit einigen "nichtkommunikativen Problemen" einer verallgemeinerten Ergodentheorie, die im Zusammenhang mit den Arbeiten einer Gruppe theoretischer Physiker (Kastler, Haag, Ruelle, Doplicher, Hugenholtz u.a.) aktuell wurden.

Hartmut Scheller

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990
